EJERCITACIÓN PARA EXAMEN DE MATEMATICA
MAYORES DE 25 AÑOS SIN CICLO MEDIO COMPLETO

PRACTICO 4

Función Cuadrática – Parábolas

Noviembre 2011

Función cuadrática. Es toda función de la forma:

f(x) = a x² + b x + c, donde ***a, b* y *c*** son números reales, con la condición que ***a*** sea distinto de 0. Son todas parábolas de eje vertical.

Ejemplos de funciones cuadráticas:

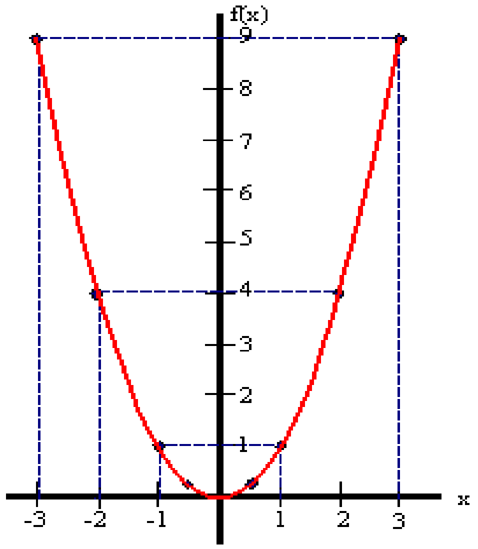
$f(x)=2x^2+3x-4,$

$g(x)=-x^2+4x$

$H(x)=\frac{1}{2}x^2+9$

$K(x)=-3x^2$

El gráfico siguiente es una porción del gráfico de la función $f(x)=x^2$.



En este caso el eje E de la parábola coincide con el eje Y de las ordenadas y el vértice V(0, 0) con el origen de coordenadas.

Ejercicio 1.- Complete en cada caso, las tablas indicadas a continuación y trace un gráfico aproximad de las funciones:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_1(x)=x^2$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_2 = \frac{1}{3}x^2$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_3 = 2x^2$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_4 = -x^2$							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g_5 = -3x^2$							

OBSERVE:

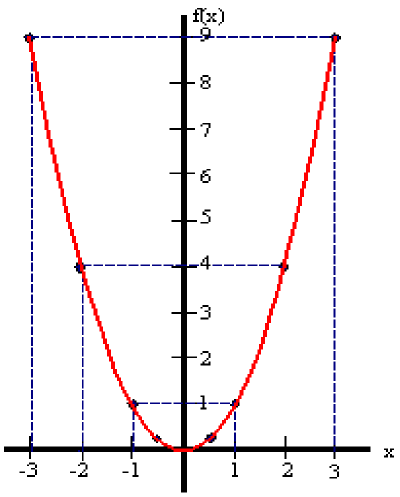
1. Las parábolas de ecuación $\boldsymbol{y = ax^2}$ *tienen como eje al eje Y de las ordenadas y como vértice al punto* ***V(0, 0).***

2. Cuanto mayor sea ***a*** *(en valor absoluto), más "cerrada" será la parábola.*

3. Las ramas van hacia arriba si ***a*** *>* ***0*** *o hacia abajo si* ***a*** *<* ***0.***

Ejercicio 3.- En las funciones g_3 y g_4 del ejercicio anterior, desarrolle el cuadrado y compruebe que ellas tienen la forma $y = ax^2 + bx + c$ **.** Aclare en cada caso cuánto valen los coeficientes *a*, *b* y *c*.

Ejercicio 4.- Vimos anteriormente que el gráfico siguiente es una porción del gráfico de la función $f(x) = x^2$.



a) A partir del mismo (*mediante desplazamientos*) obtenga los gráficos de:

$g_1(x) = x^2 + 4;$ $g_2(x) = x^2 - 3;$ $g_3(x) = (x-5)^2$ y $g_4(x) = (x+2)^2$.

b) Escriba en cada caso las coordenadas del vértice y la ecuación del eje. Tome en cuenta que cuando se desplaza una parábola, el mismo desplazamiento corresponde tanto al vértice como al eje.

RECORDATORIOS VARIOS:

* *Dada la función cuadrática –parábola–* **y = f(x) =** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$, *plantear la ecuación (cuadrática)* $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, *significa preguntarse en qué punto o puntos la parábola corta al eje X. La solución de esta ecuación se obtiene mediante la* FÓRMULA DE BHASKARA: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o bien

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como se ve, la solución de la ecuación cuadrática está formada por los valores x_1 y x_2, que se llaman *raíces de la ecuación, o bien, raíces de la parábola.*

**** Las ecuaciones cuadráticas pueden tener: DOS, UNA O NINGUNA raíces reales***

* Cuando ocurre que $b^2 - 4ac = 0$, la fórmula de Bhaskara indica que las raíces x_1 y x_2 son coincidentes y por lo tanto que la parábola corta al eje X sólo en un punto. Aún en tal situación se sigue considerando que la ecuación tiene dos raíces, pero aclarando que en este caso son coincidentes.

Es fácil de verificar que dados dos números *cualesquiera* a y *b de la recta, el punto medio entre ellos corresponde al número* $\frac{a+b}{2}$. Por lo tanto si una parábola tiene dos raíces x_1 y x_2, iguales o distintas, el punto medio entre ellas es $\frac{x_1 + x_2}{2}$. Si las raíces son coincidentes es claro que $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_1}{2} = x_1 = x_2$.

***** Para las parábolas con dos raíces reales x_1 y x_2, coincidentes o no, el eje es la recta paralela al eje Y que pasa por el punto medio entre las dos raíces y el vértice es el $\mathbf{V}(x_v, y_v)$, donde $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_v = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

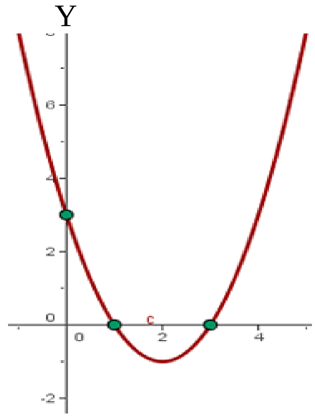
Ejemplo 1: Consideremos la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Para la ecuación $\boldsymbol{x^2 - 4x + 3 = 0}$ se tienen los valores $a = 1$, b = -4 y c = 3, luego

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{16 - 12}}{2} = 1 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{4 + \sqrt{16 - 12}}{2} = 3$$

Entonces la parábola corta al eje X en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

Por otra parte, es claro que el valor $y_0 = f(0) = 3$, sobre el eje Y, corresponde al punto en que la parábola corta a dicho eje.

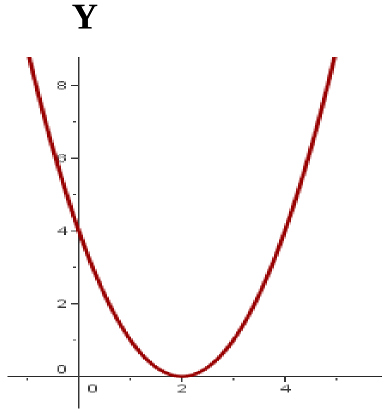


En este caso el punto medio entre las raíces $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ es $x_V = 2$ en consecuencia el eje de la parábola es la recta vertical, de ecuación **x = 2,** y el vértice el punto **V**(2, *f*(2))=
= **V**(2, -1).

Ejemplo 2: En el caso de la parábola $f(x) = x^2 - 4x + 4$, las raíces resultan ser,

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{16 - 16}}{2} = 2 = \frac{4 + \sqrt{16 - 16}}{2} = x_2$$

A su vez la intersección con el eje Y es $y_0 = f(0) = 4$. Sigue entonces que el eje de la parábola es la recta vertical **x = 2** (punto medio entre las dos raíces coincidentes) y el vértice el punto **V**(2, *f*(2)) = **V**(2, 0)



Ejemplo 3: $y = f(x) = 2x^2+4x$

Las dos raíces son, en este caso: $x_1 = 0$ *y* $x_2 = -2$. *Entonces el punto medio entre las dos es* $x_V = -1$ *e* $y_V = f(x_v) = f(-1) = 2(-1)^2+4(-1) = -2$. *Por lo tanto, el eje es la recta* $\mathbf{x = -1}$ *y el vértice el punto* $\mathbf{V}(-1, f(-1)) = \mathbf{V}(-1, -2))$.

Lectura optativa: *Veremos ahora que esta parábola tiene la misma forma que nuestra conocida de ecuación* $y = 2x^2$. *Para eso mostraremos que se la puede "correr" hasta hacerla coincidir con la primera. Es claro que si la "bajamos" 2 y la "corremos" 1 hacia la izquierda su vértice coincidirá con el de* $y=2x^2+4x$.

La corremos 1 hacia la izquierda:

$$y = 2x^2 \Rightarrow y = f(x+1) = 2(x+1)^2 = 2(x^2+2x+1) = 2x^2+4x+4$$

Luego la bajamos 2 y queda: $y = f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - 2 = \left(2x^2+4x+4\right) - 2 = \mathbf{2x^2+4x}$.

Con esto se demostró que el gráfico de la parábola del ejemplo se obtiene desplazando la de ecuación $y=2x^2$, *y por lo tanto tienen la misma forma. Esto vale en general, es decir, las parábolas de ecuación* $\mathbf{y = ax^2+bx}$ *tienen la misma forma que las de ecuación* $\mathbf{y = ax^2}$, *porque unas son "corrimientos" de las otras. Más aún, lo mismo ocurre con las completas:* $\mathbf{y = ax^2+bx+c}$ *que tienen también la misma forma que* $\mathbf{y = ax^2}$.

Ejercicio 5.- Dibuje el gráfico de las parábolas indicadas en **(i)**, **(ii)**, **(iii)** y **(iv),** obteniendo previamente:

- **(a)** Los puntos de intersección con los ejes X e Y
- **(b)** El eje de la parábola
- **(c)** Las coordenadas $\left(x_V, y_V\right)$ del vértice.

(i) $y = f(x) = -3x^2 - 9x$ **(ii)** $y = f(x) = -2x^2 + 8x$

(iii) $y = f(x) = 4x^2 - 16x$ **(iv)** $y = f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x$

Ejemplo: se resuelve el caso (i)

Observe en primer lugar que, por ser $a = -3 < 0$, las ramas estarán orientadas hacia abajo.

Los puntos de intersección con el eje x se hallan resolviendo la ecuación

$$-3x^2 - 9x = 0\ .$$

Como hasta ahora podemos aplicar Bhaskara, pero en este caso –en que falta el término independiente c– resulta más fácil sacar el factor común x y proceder como sigue:

$$-3x^2-9x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(-3x-9)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ó \\ -3x-9=0 \;\Rightarrow x=\dfrac{9}{-3}=-3 \end{cases}$$

Luego, los puntos de intersección con el eje x son: $x_1=0$ y $x_2=-3$

Observación: *es interesante hacer notar que el procedimiento anterior muestra que las ecuaciones cuadráticas* $ax^2+bx=0$, *en las que falta el término independiente* c, *<u>siempre tienen dos raíces reales</u>, que son* $x_1=0$ y $x_2=-\dfrac{b}{a}$

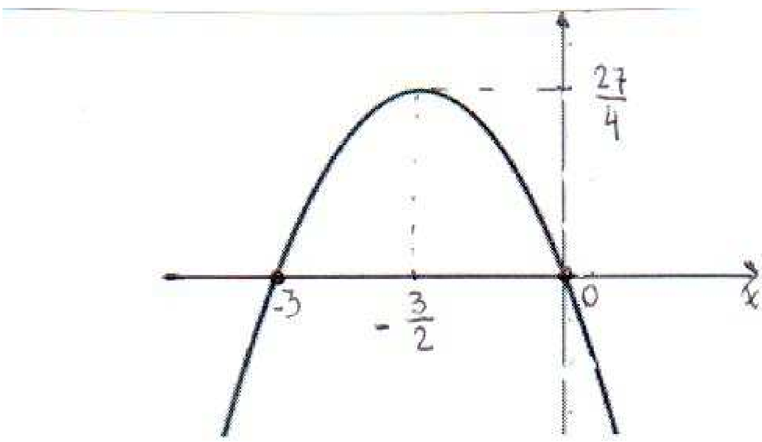
Continuamos con el ejemplo: Para hallar las coordenadas del vértice, calculamos el punto medio entre las dos raíces

$$x_V=\frac{0+(-3)}{2}=-\frac{3}{2}$$

Luego, el eje es la recta $x=-\dfrac{3}{2}$ y además, como $f(0)=0$, la parábola corta al eje Y en el origen. Para hallar y_V simplemente calculamos

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-3\left(-\frac{3}{2}\right)^2-9\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{4}+\frac{54}{4}=\frac{27}{4}.$$

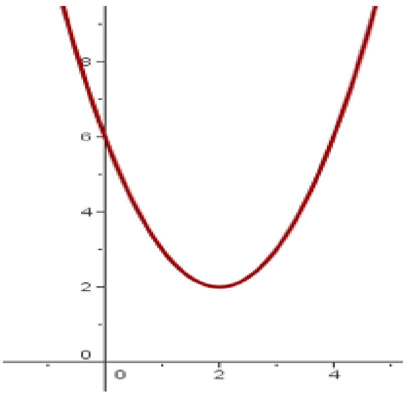
Entonces, el vértice es el punto $V=\left(-\dfrac{3}{2}\,,\,\dfrac{27}{4}\right)$.



Nos falta sólo tratar el caso de las parábolas de ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ **que no tienen ninguna raíz real, es decir, que no cortan al eje X.**

El hecho que la parábola no corte al eje X significa que está estrictamente por encima o bien estrictamente por debajo del mismo.

Consideremos la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, ***(con a>0)*** **que no *corta al eje X.***



Recuerde que: si a > 0, la forma es "$\cup$" y si a < 0, la forma es "$\cap$". Por lo tanto cuando ***a>0*** *la curva NO puede estar totalmente por debajo del eje X.*

Por otra parte, es claro que si a la parábola la "bajamos"(o la subimos) una cantidad c, el eje se mantiene inalterable y el vértice "baja" (sube) una cantidad c.

En este caso, para hallar las coordenadas x_V e y_V del vértice de nuestra parábola, se procede de la siguiente forma:

1º) Se "baja" la parábola de manera que corte al eje X. Una forma de lograrlo es restar c a la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con lo cual se obtiene la nueva parábola $g(x) = ax^2 + bx$, que ya se sabe corta al eje X en los puntos $x_1' = 0$ y $x_2' = -\frac{b}{a}$ y por lo tanto podemos determinar las coordenadas de su vértice.

2º) Se hallan las coordenadas x'_V e y'_V del gráfico de $g(x)$ y luego, teniendo en cuenta que $f(x) = g(x) + c$, resulta que $x_V = x'_V$ e $y_V = y'_V + c$.

En síntesis: La parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

- *Corta al eje Y en el punto f(0) =* c

- $x_V = x'_V = \dfrac{x'_1 + x'_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$

- $y_V = y'_V + c = g(x_V) + c = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = -\dfrac{b^2}{4a} + c$

por lo tanto el eje es la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$

y el vértice el punto $\mathbf{V}\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2}{4a} + c\right)$

Observación: Cuando el coeficiente a de x^2 es negativo, la única diferencia con el caso anterior consiste en que las parábolas tienen las ramas hacia abajo. Se las estudia de manera totalmente similar.

Ejercicio 6.- Dibuje el gráfico de las parábolas que se dan a continuación, obteniendo previamente:

(a) Los puntos de intersección con el eje x, (*si existen).*

(b) El punto de intersección con el eje *y*

(a) Las coordenadas (x_V, y_V) del vértice y la ecuación del eje.

i) $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$

(ii) $y = f(x) = 2x^2 + 2x - 12$

(iii) $y = f(x) = -3x^2 + 9x - 6$

(iv) $y = f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

(v) $y = f(x) = -x^2 - 4x - 7$