EJERCITACIÓN PARA EXAMEN DE MATEMATICA
MAYORES DE 25 AÑOS SIN CICLO MEDIO COMPLETO

PRACTICO 3
Función Lineal – Rectas
Noviembre 2011

RECORDAR: *Una función lineal es de la forma f(x) = **a**x+**b**, con la propiedad que los **cocientes incrementales:***

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

*tienen el valor constante **a** (pendiente de la recta), cualesquiera que sean dos puntos* $(x_0, f(x_0))$, *y* $(x_1, f(x_1))$, *de la misma.*

Ejemplo: Dada la función $y = f(x) = 4x - 1$, calculemos los cocientes incrementales correspondientes a los siguientes puntos de la misma

$(1, f(1))$ y $(2, f(2))$ $\Rightarrow$ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{7-3}{1} = 4 = \mathbf{a}$

$(0, f(0))$ y $(3, f(3))$ $\Rightarrow$ $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{11-(-1)}{3} = \frac{12}{3} = 4 = \mathbf{a}$

$(-1, f(-1))$ y $(-2, f(-2))$ $\Rightarrow$ $\frac{f(-2)-f(-1)}{-2-(-1)} = \frac{-9-(-5)}{-1} = \frac{-4}{-1} = 4 = \mathbf{a}$

Ejercicio 1.- (a) Grafique las tres funciones lineales dadas en cada uno de los caso **(i)** y **(ii)** en el mismo sistema de ejes coordenados (uno para cada caso) y observe la relación entre las pendientes y las posiciones de cada una de las rectas respecto de las otras dos. (Saque conclusiones)

(i) $f(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}x$ $h(x)=-3x$,

(ii) $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$, $h(x)=2x-2$, $g(x)=4$

(b) Indique cuáles de las funciones del punto anterior son crecientes y cuáles decrecientes. Observe el signo de las respectivas pendientes y formule una conjetura.

Ejercicio 2.- Dada $y = f(x) = \frac{1}{3}x$,

(a) Obtenga la expresión de las siguientes funciones:

(i) $g(x) = f(x) + 3$ **(ii)** $h(x) = f(x) + 5$ **(iii)** $w(x) = f(x) - 2$

(b) En un mismo sistema de ejes coordenados grafique todas las funciones –rectas– del inciso **(a)**.

(c) Determine, para cada una de las rectas anteriores, la ordenada del punto de abscisa $x = -2$ y márquelo sobre el gráfico correspondiente.

Ejemplo: La respuesta para el inciso **(i)** en **(a)** es: La expresión de $g(x) = f(x) + 3$ resulta ser $g(x) = \frac{1}{3}x + 3$.

Para el caso **(c):** la ordenada del punto de abscisa $x = -2$ se calcula de la siguiente manera $y = g(-2) = \frac{1}{3}(-2) + 3 = \frac{7}{3}$. Luego las coordenadas del punto sobre la recta son $\left(-2,\ \frac{7}{3}\right)$.

Ejercicio 3.- Halle la ecuación de la recta y trace el correspondiente gráfico, en cada uno de los siguientes casos:

(a) De pendiente -3 y ordenada al origen 2.

(b) De pendiente $\frac{1}{5}$ y ordenada al origen -4

(c) De pendiente 0 y ordenada al origen 7

(d) De pendiente -5 y pasa por (-1 , 3)

(e) De pendiente $\frac{4}{3}$ y pasa por el origen de coordenadas

(f) De pendiente 9 y pasa por (0 , 3)

(g) Paralela a la recta de ecuación $y=-x+4$ y pasa por (1 , 0)

(h) Paralela a la recta de ecuación $y=6x$ y pasa por (-1, -1).

(i) Perpendicular a la recta de ecuación $y = 3x - 2$ y pasa por $(9\ ,\ 7)$.

(j) Perpendicular a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 2$ y pasa por $(0\,,\,7)$.

(k) Para las rectas en (a), (d) y (j) calcule la intersección de cada una con el eje X.

Ejercicio 4.- Cada una de las siguientes tablas define una función. Para cada una de ellas:

(a) Represente (cuidadosamente) los datos de la tabla en un sistema de coordenadas cartesianas.

(b) Si los puntos del gráfico obtenido en **(a)** "aparecen alineados", trate de determinar los números ***a*** y ***b*** tales que cada uno de tales puntos pertenezcan a la recta $y = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$. En tal caso se dice que los valores (dependientes) de la segunda fila están relacionados (o *dependen linealmente)* con los valores (independientes) de la primera fila.

(i)

Tiempo de marcha (en horas): x	1	2	3	5	10	12
Espacio recorrido (en km.) $y=f(x)$	80	160	240	400	800	960

(ii)

Capital invertido (en pesos): x	1000	500	250	125	750
Interés percibido (en pesos) $I=I(x)$	100	50	25	12.5	75

(En este caso resultaría $I = \boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}$)

(iii) Un biólogo ha contado las amebas que hay en cada momento en su cultivo:

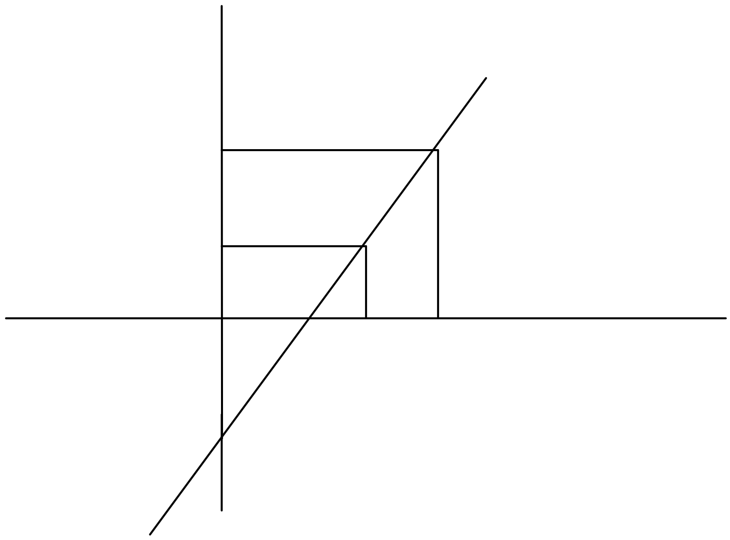
Tiempo (en horas): t	0	1	3	5	8
Número de ameba: $N=f(t)$	4	6	13	30	103

(En este caso resultaría $N = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$)

Ecuación de la Recta que Pasa por dos Puntos Dados

Tomando en cuenta lo indicado en el recuadro, al comienzo de este práctico, resulta que la ***pendiente a****, de una recta de ecuación y = f(x) =* ***a****x+**b**, que pasa por dos puntos* $P_0\left(x_0\,,\,f\left(x_0\right)\right)$ *y* $P_1\left(x_1\,,\,f\left(x_1\right)\right)$, *se calcula como:*

$$\boldsymbol{a} = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}, \quad (\text{¡}ojo!) \qquad x_0 \neq x_1 \qquad\qquad \textbf{(*)}$$



Cuando los puntos P_0 y P_1 son tales que $x_0 = x_1$*, es claro que la recta que los contiene es paralela al eje Y, y por lo tanto se trata de una recta VERTICAL, que NO PUEDE SER EL GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN LINEAL. (¿Por qué razón?). Nótese que en este caso no es aplicable la fórmula* ***(*)****, pues el denominador es nulo.*

La ecuación de tal recta vertical es $x = x_0$*. Es decir, la satisfacen todos los puntos del plano que tienen la misma abscisa* x_0*, y sólo ellos.*

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, 4) y (-2, -3) es $x = -2$
Grafique los puntos dados y la recta que los contiene.

Ejercicio 5.- Halle la ecuación de la recta que pasa por los pares de puntos indicados y trace el gráfico en cada uno de los siguientes casos:

(a) $P=(1,1)$ y $Q=(2,\ 3)$ **(b)** $P=(0,\ 2)$ y $Q=(-3,\ 1)$

(c) $P=(3,\ 4)$ y $Q=(6,-1)$ **(d)** $P=(3,\ 1)$ y $Q=(3,\ 2)$

(e) $P=(-5,\ 9)$ y $Q=(5,\ 9)$

Ejercicio 6.- (a) Halle la ecuación de la recta que pasa por $(3,3)$ y es paralela a la recta que contiene a los puntos de coordenadas $(0\ ,\ 2)$ y $(5\ ,\ -1)$. Grafique.

(b) Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,3)$ y es perpendicular a la recta que contiene a los puntos $(1\ ,\ 2)$ y $(4\ ,\ -1)$. Grafique.

Ecuación Implícita de la Recta.

RECORDAR: Si A, B, C son números reales, con A y B no simultáneamente nulos, El conjunto de puntos del plano que satisfacen la ecuación

$$Ax+By+C=0, \qquad \textbf{(**)}$$

determinan una ***recta*** *que puede ser:* ***vertical, horizontal u oblicua.***

La ecuación ***(**)*** *se llama ecuación* ***implícita o general*** *de la recta.*

Si $B \neq 0$*, despejando y en* ***(**)*** *se puede obtener la ecuación* ***explícita*** $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$. *Que es una recta* ***horizontal*** *cuando* **A=0** *y* ***oblicua*** *si* $A \neq 0$.

Si $B=0$ *(es* $A \neq 0$*) la recta tiene ecuación* ***explícita*** $x=-\frac{C}{A}$, *y es vertical (paralela al eje y).* ***En este caso su gráfico no corresponde al gráfico de una función lineal.***

Ejemplos.

1.- La ecuación $2x-3y+4=0$ es la ecuación implícita de una recta. Despejemos y para hallar su ecuación explícita:

$$2x-3y+4=0 \quad \Rightarrow \quad -3y=-2x-4 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-2x-4}{-3} \quad \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

2.- La ecuación explícita de la recta $-3x+2=0$ es, despejando *x*, $x=\dfrac{2}{3}$.

Ejercicio 7.- (a) Indique cuál o cuáles de las rectas:

$$y=3x-\frac{1}{3} \qquad y=3(x+2) \qquad -3x+y+2=0 \qquad 4x+2y=4\,,$$

cortan al eje de las ordenadas en el mismo punto que la recta $y=3x+2$

(b) ¿Cuáles son paralelas a ella?

Ejercicio 8.- Determine, para cada uno de los pares de rectas que se dan a continuación, si ambas son incidentes (se cortan en un único punto) o son paralelas. En aquellos casos en que sean paralelas, determine si son paralelas separadas o coincidentes.
Cuando en algún par las rectas no sean paralelas, determine analíticamente el punto de intersección y verifique gráficamente el resultado.

(a) $r:\ -3x+2y-2=0$; $\qquad r':\ x-2y-6=0$

(b) $r:\ -8x+2y+2=0$; $\qquad r':\ 4x-y-6=0$

(c) $r:\ y=\dfrac{1}{2}x-2$; $\qquad r':\ 4x-2y=7$

(d) $r:\ -x+2y=2$; $\qquad r':\ x+2y=6$